Remarks on the self-capacitance of coils

Monsieurs P -L Cassou and J Cayrel.
Reports of the meetings of the Académie des Sciences, Vol. 198 (1934), p 1305 - 1308

Translated by Catherine E Knight and David W Knight, version 1.01, 27th Mar. 2015
(The original French document is given at the end of the translated version)

Despite the good work of Drude[1], Fleming[2] and Seibt[3] on solenoids, the self-capacitance of a coil is frequently ignored. The serious limitations that this places on the classical view of antenna coils will now be shown.

1. Experimental study of the effective capacitance of a single-layer cylindrical coil as a function of length.
- We have studied many coils of different length but the same diameter (D = 85 mm), obtained by winding turns continuously on a tube of bakelite using wire insulated with cotton (d = 0.6 mm).
a. Each coil is excited at its own wavelength using an electrical discharge. An induction loop, through which flows the current from a parallel-connected buzzer, is placed half-way along. λ_0 is measured using a wavemeter receiver very weakly coupled to the coil.
b. The self-inductance of each coil is then measured using a wave generator at constant wavelength.

Let L_e and C_e be the self inductance and capacitance at the fundamental self-resonance wavelength. We then have:

(1) $\lambda_0 = 2\pi c\sqrt{L_e C_e}$ (where c is the speed of light)

(2) $L_e = (2/\pi) L$

From these two expressions, one obtains the self-capacitance

(3) $C_e = \lambda_0{}^2 / (4\pi^2 c^2 L_e)$

The table below gives λ_0 , L_e and C_e as a function of the length ℓ.

	l (millimètres).	λ_0 (mètres).	Le (millihenrys).	Ce (μF.10^{-6}).
B_1	6,6	14,5	0,0056	10,9
B_2	15,5	25	0,025	6,87
B_3	37	40	0,091	4,95
B_4	84,5	69	0,32	4,23
B_5	142,5	89	0,56	3,93
B_6	197,5	107	0,81	3,93
B_7	430	173,5	2,10	4,02
B_8	1000	330	5,55	5,61
B_9	1430	440	8,05	6,85

We see that C_e passes through a minimum when $\ell \approx 2D = 170$ mm.

1 Ann. der Phys. 9, 1902, p293
2 **Principles de la Télégraphie par ondes électriques** (London), 1906, p251.
3 E. T. Z., 4, 1902, p411

2. Interpretation: homopolar and heteropolar capacitance of a coil.

The capacitance $Q = C/V$ of a single conductor isolated in space increases with the dimensions of the conductor.

The capacitance of a capacitor made of two identical structures having equal charge and opposite sign depends:

1° On the intrinsic capacitance of the the structures A and B.

2° On the mutual capacitance C^{B}_{A} that results from the lowering of the potential of A by the negative charges of B.

Depending on whether the conductors A and B are far apart or close, the capacitance of capacitor A B will be almost entirely determined by the first or second factor.

Let us consider a coil oscillating at its half-wavelength. At each instant, the two halves, OP and ON, have equal charges of opposite sign, similar to the two structures of the capacitor AB.

The intrinsic capacitance of the positive half OP (homopolar capacitance) is much larger than the potential created by the positive charges on P and much smaller than implied by the length of the half-coil.

Alternatively, the negative charges on the half ON lower the potential of the positive half OP, and this, more so than the ends of the coil N and P, where the density of the charge is at a maximum, brings them together. The result is an increase ΔC in the capacitance of the system greater than the shortness of the coil implies. We will refer to this increase as the 'heteropolar capacitance' of the coil.

We therefore consider the effective capacitance as the sum:

$$C_e = C_{hom} + C_{het}$$

As ℓ varies from 0 to ∞, C_{hom} changes from 0 to ∞ and C_{het} changes from ∞ to 0. This explains[4] the minimum in C_e.

Conclusions: The effective capacitance of a coil oscillating at its half-wavelength takes on a simple form.

1° In the case of long coils, which can perhaps be considered to be like a single conductor isolated in space (capacitance derived from Kirchhoff's theory), we have:

$$C_e = C_{hom} = \text{const} \times \ell$$

Hence

(I) $$\lambda_0 = \text{const} \times \ell \quad \text{(classical result)}$$

2° In the case of very short coils, which can be compared to the capacitance of a capacitor like a thin blade inversely proportional to the length of the coil[5];

$$C_e = C_{het} = \text{const} / \ell \qquad L_e = \text{const} \times \ell^2$$

Hence

(II) $$\lambda_0 = \text{const} \sqrt{\ell}$$

---

4 The existence of the heteropolar capacitance is modified for short coils. The distribution of current (i) along the coil augments L_e in comparison to the value $L \times 2/\pi$, which we have accepted as a first approximation. The general appearance of the variation of C_e as a function of L is otherwise the same.

5 In effect, the thickness of the dielectric is here the sum of widths of the spaces between the turns.

Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences
Tome 198, Jan. - Juin 1934

ÉLECTRICITÉ. — *Remarques sur la capacité propre des bobines.* Note (²) de MM. **P.-L. Cassou** et **J. Cayrel**, présentée par M. Paul Janet.

Malgré les beaux travaux de Drude (³), de Fleming (⁴) et de Seibt (⁵) sur les solénoïdes, la complexité de la notion de *capacité propre* appliquée à une bobine demeure le plus souvent inaperçue. Les importantes restrictions qu'il convient d'apporter de ce point de vue à l'assimilation classique des bobines aux antennes sont exposées ci-après.

1. *Étude expérimentale de la capacité effective d'une bobine cylindrique à*

(²) Séance du 12 mars 1934.

(³) *Ann. der Phys.*, 9, 1902, p. 293.

(⁴) *Principes de la Télégraphie par ondes électriques* (Londres), 1906, p. 251.

(⁵) *E. T. Z.*, 4, 1902, p. 411.

une couche en fonction de sa longueur. — Nous avons étudié plusieurs bobines de longueurs différentes l et de même diamètre ($D = 85^{mm}$) obtenues en enroulant à spires jointives sur un tube de bakélite du fil isolé sous coton ($d = 0^{mm},6$).

a. On excite *par choc* chaque bobine sur sa longueur d'onde propre λ_0 à l'aide d'une spire inductrice *médiane* traversée par le courant d'un buzzer shunté et l'on mesure λ_0 à l'aide d'un ondemètre récepteur *très faiblement couplé* avec la bobine.

b. On mesure ensuite la self L de chaque bobine à l'aide d'un contrôleur d'ondes par la méthode dite à λ constant.

Soient Le et Ce les self et capacité effectives correspondant à l'onde fondamentale λ_0 ; on a

$$\lambda_0 = 2\pi\Omega\sqrt{LeCe}, \tag{1}$$

$$Le = \frac{2}{\pi}L. \tag{2}$$

De ces deux relations, on tire la capacité propre

$$Ce = \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2\Omega^2 Le}. \tag{3}$$

Le tableau ci-dessous donne λ_0, Le et Ce en fonction de la longueur l.

	l (millimètres).	λ_0 (mètres).	Le (millihenrys).	Ce (μF.10^{-6}).
B_1	6,6	14,5	0,0056	10,9
B_2	15,5	25	0,025	6,87
B_3	37	40	0,091	4,95
B_4	84,5	69	0,32	4,23
B_5	142,5	89	0,56	3,93
B_6	197,5	107	0,81	3,93
B_7	430	173,5	2,10	4,02
B_8	1000	330	5,55	5,61
B_9	1430	440	8,05	6,85

On voit que Ce *passe par un minimum* pour $l \# 2D$.

2. *Interprétation : Capacité homopolaire et capacité hétéropolaire d'une bobine.* — La capacité $C = Q/V$ d'un *conducteur unique* A isolé dans l'espace augmente avec les dimensions de ce conducteur.

La capacité d'un *condensateur* AB formé de deux armatures identiques possédant des charges égales et de signes contraires dépend :

1° de la capacité *intrinsèque* des armatures A et B;

2° de la capacité *mutuelle* C_A^B résultant de l'abaissement du potentiel de A par les charges négatives de B.

Selon que les conducteurs A *et* B *seront ou très éloignés ou très proches, la capacité du condensateur* AB *sera à peu près uniquement déterminée ou par le premier ou par le second facteur.*

Considérons une bobine vibrant en demi-onde. Ses deux moitiés OP, ON possédant à chaque instant des charges égales et de signes contraires peuvent être assimilées aux armatures d'un condensateur AB.

La capacité intrinsèque de la moitié positive OP (*capacité homopolaire*) est d'autant plus grande que le potentiel créé par les charges positives en P est plus petit, c'est-à-dire que *la demi-bobine est plus longue.*

Mais par ailleurs les charges négatives de la moitié ON abaissent le potentiel de la moitié positive OP, et ce, d'autant plus que les extrémités N et P de la bobine, où la densité de charge est maxima, sont plus rapprochées. Il en résulte un *accroissement* ΔC *de la capacité du système d'autant plus grand que la bobine est plus courte.* Nous donnerons à cet accroissement le nom de *capacité hétéropolaire* de la bobine.

On peut donc considérer la capacité effective comme la somme

$$C_e = C_{\text{hom}} + C_{\text{hét}}.$$

Quand l varie de o à ∞, C_{hom} varie de o à ∞ et $C_{\text{hét}}$ de ∞ à o. L'existence du minimum de C_e se trouve donc expliquée ([1]).

Conclusions. — La capacité effective d'une bobine vibrant en demi-onde prend une forme simple :

1° dans le cas des bobines très longues où elle peut être assimilée à la capacité d'un conducteur unique isolé dans l'espace (capacité répartie de la théorie de Kirchhoff). On a alors

$$C_e = C_{\text{hom}} = \text{const.} \times l, \qquad L_e = \text{const.} \times l,$$

d'où

$$\text{(I)} \qquad \lambda_0 = \text{const.} \times l \qquad \text{(résultat classique)};$$

2° dans le cas des bobines très courtes où elle peut être assimilée à la capacité d'un condensateur à lame mince inversement proportionnelle à la

([1]) L'existence de la capacité hétéropolaire en modifiant pour les bobines courtes la répartition de i le long de la bobine augmente L_e par rapport à la valeur $L \times 2/\pi$ que nous avons admise en première approximation, mais l'allure générale de la variation de C_e en fonction de l reste la même.

longueur de la bobine [1],

$$C_e = C_{\text{hét}} = \frac{\text{const.}}{l}, \qquad L_e = \text{const.} \times l^2,$$

d'où

$$\text{(II)} \qquad \lambda_0 = \text{const.} \sqrt{l}.$$

---

[1] En effet l'épaisseur du diélectrique est ici la somme des épaisseurs des isolants des spires.